

REPRÉSENTATION D'UN SYSTÈME THERMOÉLASTIQUE VIBRANT SANS ET AVEC FLUAGE DANS LA DIRECTION DE LA VIBRATION

By R. MAZET

Professeur à l'Université de Poitiers
Directeur Scientifique à l'O.N.E.R.A.

1. POSE DU PROBLÈME. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

Nous nous proposons d'étudier certains mouvements d'une structure thermoélastique dont les points ne peuvent se déplacer que parallèlement à une direction fixe Δ . En vue d'aboutir à des formules traduisibles en écriture matricielle, particulièrement commode dans les applications en raison des possibilités qu'elle offre pour les calculs exacts ou approchés, nous regarderons cette structure comme un édifice de points matériels P , en nombre d'abord fini n , échangeant entre eux des actions élastiques, visqueuses et thermiques. Un passage à la limite tout à fait classique permettra ensuite, si nécessaire, de remplacer les équations différentielles matricielles obtenues par les équations aux dérivées partielles dont elles constituent pour n fini une traduction approchée.

Chaque point P_i est caractérisé par sa cote Z_i parallèlement à Δ et sa température absolue θ_i . Un certain nombre de ces points, dont nous dirons qu'ils sont du type A et qu'ils constituent l'"embase" de la structure, sont fixes et maintenus à des températures constantes θ_A . D'autres, dont nous dirons qu'ils sont du type B et qu'ils constituent le "revêtement" de la structure, sont libres, mais reçoivent de l'extérieur un flux unitaire de chaleur Q_B lié à leur température θ_B par une relation imposée $Q_B = \mathcal{F}_B(\theta_B)$. La structure peut en outre être soumise, aux points B , à des charges Π_B constantes ou lentement variables.

Tel serait, par exemple, le cas d'une aile d'avion en vol supersonique (Fig. 1): les points du type A seraient ceux de l'emplanture; les points

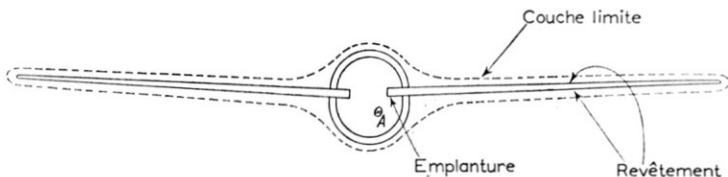


FIG. 1

du type B seraient ceux de l'intrados et de l'extrados soumis au vent relatif; ce dernier leur applique des charges Π_B et leur apporte des flux de chaleur $Q_B = h_B (T_B - \Theta_B)$, T_B étant la température athermane que le courant d'air tend à imposer au revêtement et h_B le coefficient de transmission par convection de la couche limite.

Pour simplifier l'exposé, nous admettrons qu'il existe un seul point du type A et un seul du type B ; ce seront respectivement les points P_0 et P_n . Quant aux autres points de la structure, ils seront, sauf spécification contraire, libres, non chargés et thermiquement isolés de l'extérieur.

2. LA PREMIERE EQUATION

Le principe général de la mécanique, appliqué au point $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$, donne l'équation:

$$M_i \ddot{Z}_i = - \sum_j K_{ij} (Z_i - Z_j - l_{ji}) - \sum_j F_{ij} (\dot{Z}_i - \dot{Z}_j) + \Pi_i \quad (1)$$

M_i étant la masse de P_i , K_{ij} le coefficient caractérisant l'action élastique entre P_i et P_j , l_{ji} la valeur de $Z_i - Z_j$ correspondant à une action nulle (l_{ji} est l'"écart neutre dans le sens ji "), F_{ij} le coefficient caractérisant l'action visqueuse entre P_i et P_j , Π_i la charge extérieure (nulle pour $i \neq n$). L'indice j prend, en principe, toutes les valeurs de zéro à n ; toutefois K_{ij} et F_{ij} , nuls pour $j = i$, ne sont, en général, différents de zéro que pour un nombre limité de valeurs de j encadrant la valeur i (correspondant à une "zone d'influence" localisée au voisinage immédiat de P_i); il est à noter que ces coefficients, lorsqu'ils ne sont pas nuls, ne sont pas forcément positifs bien que le potentiel élastique à températures constantes et la fonction dissipative, calculés pour l'ensemble de la structure, le soient nécessairement; on a d'autre part:

$$K_{ji} = K_{ij}; \quad F_{ji} = F_{ij}; \quad l_{ij} = -l_{ji}$$

3. DEUX EXEMPLES SIMPLES

Par exemple, pour un barreau rectiligne AB fixé en A et soumis en B à une charge Π s'exerçant dans la direction AB (Fig. 2), on aurait, en décomposant le barreau non chargé en n parties égales à h par les points de subdivision P_0 (alias A), $P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$ (alias B) et comptant les Z à partir de A positivement vers B :

$$M_i = (\rho S)_i h$$

$$K_{ij} = \begin{cases} (1/2h)[(ES)_i + (ES)_j] & \text{si } i - j = \pm 1 \\ 0 & \text{si } i - j \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$l_{ji} = \begin{cases} +h & \text{si } i - j = +1 \\ -h & \text{si } i - j = -1 \\ 0 & \text{si } i - j \neq \pm 1 \end{cases}$$

$(\rho S)_i$: masse spécifique linéaire au point P_i

$(ES)_i$: module de traction-compression au point P_i

de telle sorte que (1) soit la traduction approchée de l'équation aux dérivées partielles (la viscosité étant négligée):

$$\rho S \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ES \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - 1 \right) \right]$$

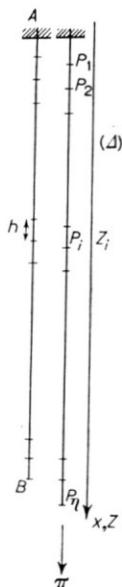


FIG. 2. Mouvement longitudinal d'un barreau chargé axialement

Pour un barreau rectiligne AB encastré en A et soumis en B à une charge Π s'exerçant dans la direction Δ perpendiculaire à AB (Fig. 3),

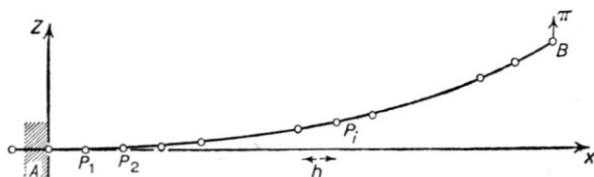


FIG. 3. Flexion d'un barreau chargé perpendiculairement à son axe

on aurait, en prenant la même décomposition que ci-dessus (les deux premiers points, limitant un premier tronçon encastré, appartiennent au type A) et comptant les Z à partir de la position non chargée Ax :

$$M_i = (\rho S)ih$$

$$K_{ij} = \begin{cases} (2/h^3)[(Ei)_i + (Ei)_j] & \text{si } i - j = \pm 1 \\ -(1/2h^3)[(Ei)_i + (Ei)_j] & \text{si } i - j = \pm 2 \\ 0 & \text{si } i - j \neq \pm 1, \pm 2 \end{cases}$$

$$l_{ii} = 0$$

$(Ei)_i$: module de flexion au point P_i

de telle sorte que (1) soit la traduction approchée de l'équation aux dérivées partielles (en négligeant la viscosité):

$$\rho S \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E i \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right)$$

4. LA DEUXIEME EQUATION

Revenons au cas général. Le bilan thermique effectué pour le point P_i fournit une seconde équation:

$$c_i \dot{\Theta}_i = - \sum_j \alpha_{ji} \sigma_{ij} (\dot{Z}_i - \dot{Z}_j) + \frac{1}{2} \sum_j \alpha_{ji} F_{ij} (\dot{Z}_i - \dot{Z}_j)^2 - \sum_j \delta_{ij} (\Theta_i - \Theta_j) + Q_i \quad (2)$$

c_i étant la chaleur spécifique à volume constant de la masse M_i , $-\sigma_{ij} d(Z_i - Z_j)$ la chaleur produite réversiblement par la déformation $d(Z_i - Z_j)$, α_{ji} la part de cette chaleur que reçoit P_i , σ_{ij} la conductance thermique entre P_i et P_j , Q_i le flux unitaire de chaleur apporté de l'extérieur (nul pour $i \neq n$); on a:

$$\sigma_{ji} = -\sigma_{ij}; \quad \alpha_{ij} = 1 - \alpha_{ji}; \quad \delta_{ji} = \delta_{ij}$$

5. LES COEFFICIENTS ξ_{ji}

Avant d'aller plus loin, montrons que l'existence d'un potentiel thermoélastique V associé à la déformation (en l'absence de viscosité et de conductivité) permet d'exprimer $\alpha_{ji} \sigma_{ij}$ à l'aide de certains éléments de l'équation (1). On a, en vertu des principes de la thermodynamique:

$$dV = \sum_i \left\{ \sum_j K_{ij} (Z_i - Z_j - l_{ji}) dZ_i - S_i d\Theta_i \right\} \quad (3)$$

S_i étant l'entropie au point P_i définie par

$$dS_i = \frac{1}{\Theta_i} \left\{ \sum_j \alpha_{ji} \sigma_{ij} d(Z_i - Z_j) \right\} \quad (4)$$

Ecrivons $(\partial^2 V)/(\partial \Theta_i \partial Z_j) = (\partial^2 V)/(\partial Z_j \partial \Theta_i)$ pour $i \neq j$; il vient:

$$\frac{\alpha_{ji} \sigma_{ij}}{\Theta_i} = \frac{\partial}{\partial \Theta_i} \left[\sum_k K_{jk} (Z_j - Z_k - l_{kj}) \right] = \xi_{ji} \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (5)$$

en représentant par ξ_{ji} l'expression du second membre.

$$(\xi_{ji} = \frac{\partial}{\partial \Theta_i} [K_{ji} (Z_j - Z_i - l_{ij})]) \quad (5')$$

si l'on admet, comme il semble normal de le faire, que K_{jk} et l_{kj} ne dépendent que de Θ_j et de Θ_k .

On a donc:

$$\alpha_{ji} \sigma_{ij} = \Theta_i \xi_{ji} \quad (i \neq j) \quad (6)$$

On trouverait de même, en écrivant $(\partial^2 V)/(\partial \Theta_i \partial Z_i) = (\partial^2 V)/(\partial Z_i \partial \Theta_i)$:

$$-\frac{1}{\Theta_i} \sum_j \alpha_{ji} \sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial \Theta_i} \left[\sum_k K_{ik} (Z_i - Z_k - l_{ki}) \right] = \xi_{ii}$$

d'où la propriété: $\xi_{ii} = -\sum_j \xi_{ji}$.

Reprenons, par exemple, le cas du barreau chargé axialement; nous aurons d'après (5'):

$$\xi_{ji} = 0 \quad \text{pour } i \neq j-1, j, j+1;$$

$$\xi_{j,j-1} = \frac{\partial}{\partial \Theta_{j-1}} \left[\frac{(ES)_{j-1} + (ES)_j}{2l_{j-1,j}} (Z_j - Z_{j-1} - l_{j-1,j}) \right]$$

Si nous admettons—comme il semble permis de le faire ici—que le module ES en un point ne dépend que de la température en ce point et que l'écart neutre $l_{j-1,j}$ ne dépend que de la moyenne des températures Θ_{j-1} et Θ_j , il vient simplement:

$$\xi_{j,j-1} = \frac{Z_j - Z_{j-1}}{2h} \left[\frac{\partial (ES)_{j-1}}{\partial \Theta_{j-1}} - \frac{(ES)_{j-1} + (ES)_j}{2} \epsilon \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial (ES)_{j-1}}{\partial \Theta_{j-1}} \quad (7)$$

ϵ étant le coefficient de dilatation linéaire du matériau, supposé le même en tout point:

$$\epsilon = \frac{1}{l_{j-1,j}} \frac{\partial l_{j-1,j}}{\partial \Theta_{j-1,j}}$$

avec $\Theta_{j-1,j} = (\Theta_{j-1} + \Theta_j)/2$; de même:

$$\xi_{j,j+1} = -\frac{Z_{j+1} - Z_j}{2h} \left[\frac{\partial (ES)_{j+1}}{\partial \Theta_{j+1}} - \frac{(ES)_j + (ES)_{j+1}}{2} \epsilon \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial (ES)_{j+1}}{\partial \Theta_{j+1}} \quad (8)$$

d'où:

$$\xi_{jj} = -(\xi_{j-1,j} + \xi_{j+1,j}) = \frac{Z_{j+1} - Z_{j-1}}{2h} \cdot \frac{\partial (ES)_j}{\partial \Theta_j} + \frac{(Z_{j+1} - Z_j)[(ES)_j + (ES)_{j+1}] - (Z_j - Z_{j-1})[(ES)_{j-1} + (ES)_j]}{4h} \epsilon \quad (9)$$

toutes expressions qui ont un sens physique bien précis.

6. PETITS MOUVEMENTS AUTOUR
D'UN ETAT ETABLI

Comme application des formules (1) et (2), nous nous proposons d'étudier les petits mouvements de la structure autour de son état d'équilibre à charge Π_B constante, ou autour d'un mouvement moyen très lent provoqué, par exemple, par une variation suffisamment lente de Π_B .

Commençons par définir l'état d'équilibre ou le mouvement moyen que nous appellerons d'une façon générale l'"état établi" et dont nous désignerons les paramètres par Z_i^* , Θ_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$). Il résulte des équations (1) et (2) dans lesquelles nous avons, par hypothèse, le droit de négliger toutes les dérivées des paramètres par rapport au temps:

$$\left. \begin{aligned} \sum_j K_{ij}(Z_i^* - Z_j^* - l_{ji}) &= \Pi_i & j = 0, 1, 2, 3, \dots, n \\ \sum_j \delta_{ij}(\Theta_i^* - \Theta_j^*) &= Q_i \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \Pi_i &= 0 \text{ pour } i \neq n, \\ \Pi_n &= \Pi_B \text{ donné} \\ Q_i &= 0 \text{ pour } i \neq n, \\ Q_n &= \mathcal{F}_B(\Theta_n^*) \end{aligned} \right\}$$

On tire aisément du système (10) les $2n$ inconnues Z_i^* , Θ_i^* ; les Z_i^* soit des constantes, soit des fonctions très lentes du temps, selon que Π_B l'est lui-même: les Θ_i^* sont des constantes.

Posons alors:

$$Z_i = Z_i^* + z_i \quad \Theta_i = \Theta_i^* + \theta_i$$

et admettons:

(a) que les variations des Z^* soient assez lentes pour que les dérivées des Z^* par rapport au temps soient toujours négligeables vis-à-vis des dérivées de même rang des z ,

(b) que les z et les θ soient assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits,

(c) que les différences $\dot{Z}_i - \dot{Z}_j$ intervenant dans les équations restent toujours assez faibles (cf. la remarque sur l'action "localisée") pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits par les variables θ .

Le système (1) - (2) devient, compte tenu des relations (5), (6) et (10):

$$\left. \begin{aligned} M_i \ddot{z}_i + \sum_j F_{ij}(\dot{z}_i - \dot{z}_j) + \sum_j K_{ij}(z_i - z_j) + \sum_j \xi_{ij} \theta_j &= 0 \\ & i = 1, 2, \dots, n \\ c_i \ddot{\theta}_i + \sum_j \delta_{ij}(\theta_i - \theta_j) + \Theta_i^* \sum_j \xi_{ji}(\dot{z}_i - \dot{z}_j) &= q_i \\ q_i &= 0 \text{ pour } i \neq n \\ q_n &= -h \theta_n \left[h = -\frac{d\mathcal{F}_B(\Theta_n^*)}{d\Theta_n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

les valeurs de tous les coefficients étant celles de l'état établi (ce sont des fonctions des Z_i^* , Θ_i^*).

7. FORME MATRICIELLE DES EQUATIONS

(11) est maintenant un système linéaire que l'on peut mettre sous la forme matricielle:

$$\left. \begin{aligned} M\dot{\hat{z}} + F\dot{\hat{z}} + K\hat{z} + \xi\theta &= 0 \\ -\Theta^*\xi\dot{\hat{z}} + c\dot{\theta} + \delta\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

avec:

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots \\ 0 & M_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, & F &= \begin{bmatrix} \sum_j F_{1j} & -F_{12} & \dots \\ -F_{12} & \sum_j F_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \\ K &= \begin{bmatrix} \sum_j K_{1j} & -K_{12} & \dots \\ -K_{12} & \sum_j K_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, & \xi &= \begin{bmatrix} -\sum_j \xi_{j1} & \xi_{12} & \dots \\ \xi_{21} & -\sum_j \xi_{j2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \\ \Theta^* &= \begin{bmatrix} \Theta_1^* & 0 & \dots \\ 0 & \Theta_2^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, & c &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots \\ 0 & c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \\ \delta &= \begin{bmatrix} \sum_j \delta_{1j} & -\delta_{12} & \dots \\ -\delta_{12} & \sum_j \delta_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \sum_j \delta_{nj} + h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Parmi les matrices figurant dans (12), certaines M , Θ^* , c sont diagonales à éléments tous positifs; d'autres F , K , δ sont symétriques et hermitiennes, c'est-à-dire telles que les formes $\bar{X}FX$, $\bar{X}KX$, $\bar{X}\delta X$ soient définies positives; la dernière ξ est quelconque

$$\left(\xi_{ij} = -\frac{\Theta_i^* \alpha_{ij}}{\Theta_j^* \alpha_{ji}} \xi_{ji} \right)$$

Remarquons que, dans un cas d'équilibre ($\Pi_B = C^{te}$), les matrices K , δ et ξ pourraient se déduire de "coefficients d'influence généralisés" \hat{z} , $\hat{\theta}$ représentant les quantités dont l'équilibre thermoélastique serait modifié par l'application de charges unitaires et de flux de chaleur unitaires successivement en chaque point P_i ; on aurait, en effet, d'après (12):

$$\begin{bmatrix} K & \xi \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{z} & 0 \\ 0 & \hat{\theta} \end{bmatrix} = [1]$$

dont il serait possible (au moins théoriquement!) de tirer K , δ et ξ .

Les systèmes (11) ou (12), munis éventuellement de seconds membres donnés, permettent de résoudre n'importe quel problème de perturbation mécanique ou thermique subie par la structure et justiciable de l'approximation linéaire.

8. LA FORME NORMALISEE

Grâce à un changement de variables approprié, on peut donner au système matriciel (12) une forme normalisée particulièrement importante pour les applications. Désignons par α une matrice carrée d'ordre n telle que les deux matrices

$$\bar{\alpha}M\alpha = \mu \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}[K + \xi c^{-1}\Theta^*\xi]\alpha = \gamma$$

soient simultanément diagonales. Cette matrice α a une signification physique simple: ses colonnes définissent *les formes propres de vibration de la structure* supposée dépourvue de viscosité et de conductivité ($F = \delta = 0$). Si l'on effectue le changement de variables

$$z = \alpha r \quad \theta = c^{-1}\Theta^*\xi\alpha(r + s) \quad (13)$$

le système (12) devient:

$$\left. \begin{aligned} \mu\ddot{r} + \beta\dot{r} + \gamma r + ds &= 0 \\ d(r + s) + es &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

avec:

$$\beta = \bar{\alpha}F\alpha, \quad d = \bar{\alpha}\xi c^{-1}\Theta^*\xi\alpha, \quad e = \bar{\alpha}\xi\delta^{-1}\Theta^*\xi\alpha$$

Sous la forme (14), on voit immédiatement que les petits mouvements libres de la structure sont régis par un potentiel thermoélastique $V(r, s)$ et une fonction de dissipation $D(\dot{r}, \dot{s})$:

$$V = \frac{1}{2}(\overline{r, s}) \begin{bmatrix} \gamma & d \\ d & d \end{bmatrix} (r, s); \quad D = \frac{1}{2}(\dot{r}\dot{\beta}\dot{r} + \dot{s}e\dot{s})$$

Ils sont donc toujours amortis sauf dans les deux cas limites $\beta = 0$, $e = 0$ (structure non visqueuse et parfaitement conductrice), $\beta = 0$, $e = \infty$ (structure non visqueuse et non conductrice).

9. SEPARATION DES VARIABLES MECANIQUES ET THERMIQUES

Ces résultats sont bien connus. On peut les retrouver rapidement en raisonnant directement sur le système (12) pour peu que l'on se contente d'une approximation d'ailleurs tout à fait admissible. Eliminons, en effet, θ entre les deux équations (12); il vient:

$$M\ddot{z} + F\dot{z} + (K + \xi c^{-1}\Theta^*\xi)\dot{z} + \xi c^{-1}\delta \xi^{-1}(M\ddot{z} + F\dot{z} + Kz) = 0 \quad (15)$$

En raison de la petitesse des coefficients ξ_{ij} , il est légitime en pratique de négliger $\xi c^{-1}\Theta^*\xi$ devant K (se reporter par exemple aux formules

(8) et (9) relatives au cas du barreau chargé axialement). On remplace ainsi l'équation "exacte" (15) par l'équation approchée

$$M\ddot{z} + F\dot{z} + Kz + A(M\ddot{z} + F\dot{z} + Kz) = 0 \quad (16)$$

avec $A = \xi c^{-1} \delta \xi^{-1}$.

Les variables sont maintenant séparées. Si l'on pose:

$$M\ddot{z} + F\dot{z} + Kz = -\xi U \quad (17)$$

U est donné par l'équation linéaire sans second membre

$$c\dot{U} + \delta U = 0 \quad (18)$$

puis z par l'équation linéaire (17) où le second membre est connu.

La résolution est donc immédiate et il est bien visible que le système est amorti. Le rapprochement des équations (17), (18) et (12) montre que U n'est autre que θ et que l'approximation revient en définitive à négliger le terme en \dot{z} dans la deuxième équation (12).

10. CAS DU FLUAGE—

FLUAGE DANS LA DIRECTION DE LA VIBRATION— SCHEMA REPRESENTATIF ET HYPOTHESES

Envisageons maintenant le cas où, sous l'influence d'une charge Π_B excessive ou d'une élévation excessive de la température athermane T_B , certaines parties de la structure se mettent à fluer. Nous nous représenterons le fluage comme se produisant, non entre certains points P_i et P_j , mais *par dédoublement de certains points* P_i dont nous dirons qu'ils appartiennent au type C . Nous dirons qu'il y a fluage *dans la direction* Δ *de la vibration* si chaque point P_i du type C se divise en deux autres P_i , P_i tels que $P_i P_i$ soit parallèle à Δ . Nous nous limiterons à l'étude de ce cas et, pour simplifier l'exposé, raisonnerons comme s'il existait un seul point de ce type, le point P_l , dédoublé en P_l et P_l de masses respectives $M_l - m_l$ et m_l et de cotes respectives Z_l et Y_l .

Nous ferons en outre les hypothèses suivantes:

(a) la distance $P_l P_l$ est assez petite pour que les points P_l, P_l soient à la même température θ_l ;

(b) les actions élastiques, visqueuses et thermiques engendrées par les liaisons $P_j P_l$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) existant avant fluage se répartissent maintenant entre P_l et P_l , de telle sorte que les points P_j autres que P_l se partagent en trois groupes distincts: 1° — les points qui n'avaient avant fluage aucune liaison avec P_l et qui continuent à n'en avoir aucune, 2° — les points P_h qui sont, au cours du fluage, en liaison avec P_l et non avec P_l , 3° — les points P_k qui sont, au cours du fluage, en liaison avec P_l et non avec P_l (cf. Fig. 4);

(c) Y_l et Z_l peuvent être confondus, mais non \dot{Y}_l et \dot{Z}_l ; la différence $\dot{Y}_l - \dot{Z}_l$ est la *vitesse de fluage*; cette vitesse garde un signe déterminé, par exemple:

$$\dot{Y}_l - \dot{Z}_l > 0; \quad (19)$$

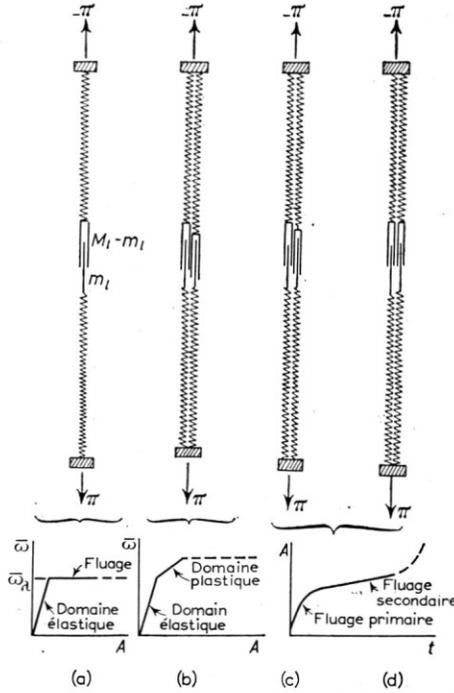


FIG. 4. Représentation approchée de divers états d'un barreau tendu.

- (a) Fluage généralisé dans l'hypothèse rigide-plastique
 - (b) Fluage localisé (écrouissage)
 - (c) Fluage généralisé primaire (selon N. Hoff)
 - (d) Fluage généralisé secondaire
- ($\bar{\omega}$, contrainte; A, allongement)

l'action échangée entre P_l et P_l provient de la *contrainte de fluage* reliée à la vitesse de fluage et à la température par une loi expérimentale établie en régime permanent (température constante, vitesse de fluage constante), mais dont nous admettrons qu'elle définit intrinsèquement la résistance aux glissements internes et reste valable en régime varié; si ϖ est la contrainte et W la vitesse de fluage, la relation la plus communément admise entre ϖ , W et Θ revêt la forme:

$$W = C(\Theta)(\varpi - \varpi_\lambda)^\alpha$$

où α est un exposant variant, en général, avec Θ , mais toujours plus grand que 1, et $\varpi_\lambda(\Theta)$ la valeur limite de la contrainte au dessus de laquelle le fluage se produit.

Tant que ϖ est $\leq \varpi_\lambda$, la liaison $P_l P_l$ reste rigide (les deux points n'en font qu'un); c'est pourquoi elle est dite "rigide-plastique". On sait qu'en combinant judicieusement plusieurs liaisons de cette espèce, on peut représenter n'importe quel état de la structure (Fig. 4): déformation purement élastique, déformation plastique ou "écrouissage" (par association de liaisons $P_l P_l$ en phase plastique et de liaisons $P_l P_l$ en phase

rigide), fluage "généralisé" entraînant le fractionnement de la structure en parties indépendants du point de vue élastique, ce fluage existant lui-même sous deux aspects: transitoire ou "primaire", permanent ou "secondaire" (nous ne parlons pas du fluage "tertiaire" au cours duquel la structure perd toute résistance mécanique).

En conclusion, si nous désignons par Π_l la force exercée par P_l sur P_l et par s_l le facteur de proportionnalité permettant de passer de la contrainte à la force, nous pourrions écrire:

$$\Pi_l = s_l[\varpi_\lambda + D(\dot{Y}_l - \dot{Z}_l)^{1/\alpha}] \quad \text{avec } D = \left[\frac{1}{C(\Theta)} \right]^{1/\alpha} \text{ et } \alpha > 1 \quad (20)$$

P_l exerce sur P_l la force $-\Pi_l$.

11. LE NOUVEAU SYSTEME D'EQUATIONS

Nous pouvons maintenant reprendre les équations (1)-(2) et les compléter. Pour tous les points qui ne sont pas le point P_l ou les points P_k , ces équations demeurent inchangées. Pour l'ancien point P_l de masse M_l , dédoublé en P_l et P_l , l'équation (1) doit être remplacée par deux autres:

$$\left. \begin{aligned} (M_l - m_l)\dot{Z}_l &= - \sum_h K_{lh}(Z_l - Z_h - l_{lh}) - \sum_h F_{lh}(\dot{Z}_l - \dot{Z}_h) \\ &\quad + s_l[\varpi_\lambda + D(\dot{Y}_l - \dot{Z}_l)^{1/\alpha}] \\ m_l \dot{Y}_l &= - \sum_k K_{lk}(Y_l - Z_k - l_{kl}) - \sum_k F_{lk}(\dot{Y}_l - \dot{Z}_k) \\ &\quad - s_l[\varpi_\lambda + D(\dot{Y}_l - \dot{Z}_l)^{1/\alpha}] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

L'équation (2), appliquée à l'ensemble des deux points P_l et P_l , doit être complétée par un terme représentant le quotient par dt de la chaleur interne engendrée par le fluage pendant dt ; celle-ci est égale, au signe près, au travail accompli pendant le même temps par les forces Π_l et $-\Pi_l$ qui sont, comme le montre l'expérience, des résistances purement passives; il vient donc:

$$\left. \begin{aligned} c_l \dot{\Theta}_l &= - \sum_h \alpha_{hl} \sigma_{lh}(\dot{Z}_l - \dot{Z}_h) - \sum_k \alpha_{kl} \sigma_{lk}(\dot{Y}_l - \dot{Z}_k) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_h \alpha_{hl} F_{lh}(\dot{Z}_l - \dot{Z}_h)^2 + \frac{1}{2} \sum_k \alpha_{kl} F_{lk}(\dot{Y}_l - \dot{Z}_k)^2 \\ &\quad - \sum_j \delta_{lj}(\Theta_l - \Theta_j) + s_l[\varpi_\lambda + D(\dot{Y}_l - \dot{Z}_l)^{1/\alpha}](\dot{Y}_l - \dot{Z}_l) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Pour un point P_k , lié à P_l et non à P_l , le système (1), (2) s'écrit:

$$\left. \begin{aligned} M_k \dot{Z}_k &= - \sum_{j \neq l} K_{kj}(Z_k - Z_j - l_{jk}) - K_{kl}(Z_k - Y_l - l_{lk}) \\ &\quad - \sum_{j \neq l} F_{kj}(\dot{Z}_k - \dot{Z}_j) - F_{kl}(\dot{Z}_k - \dot{Y}_l) + \Pi_k \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} c_k \dot{\Theta}_k &= - \sum_{j \neq l} \alpha_{jk} \sigma_{kj}(\dot{Z}_k - \dot{Z}_j) - \alpha_{lk} \sigma_{kl}(\dot{Z}_k - \dot{Y}_l) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \neq l} \alpha_{jk} F_{kj}(\dot{Z}_k - \dot{Z}_j)^2 + \frac{1}{2} \alpha_{lk} F_{kl}(\dot{Z}_k - \dot{Y}_l)^2 \\ &\quad - \sum_j \delta_{kj}(\Theta_k - \Theta_j) + Q_k \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Les équations (1), (2) pour $i \neq l, k$, jointes aux équations (21), (22) pour $i = l$ et (23), (24) pour $i = k$, permettent de résoudre, sur le système de remplacement ΣP_i , tous les problèmes relatifs à la structure en cours de fluage soit localisé, soit généralisé (noter que s_l peut dépendre de $Y_l - Z_l$.)

12. ETUDE DE L'ETAT ETABLI

Pour distinguer ces deux cas, nous chercherons tout d'abord à définir l'"état établi" dans l'hypothèse où Π_B et T_B restent constants.

Présumant un état d'équilibre et annulant par conséquent toutes les dérivées par rapport au temps, nous obtenons un système de $2n + 1$ équations qui détermine, en principe, les $2n + 1$ inconnues Z_i^* , Θ_i^* , Y_l^* . Si, toutefois, le point P_l et les points P_k appartiennent à un ensemble partiel *isolé* n'incluant pas P_l ni P_0 (c'est-à-dire n'admettant, en dehors de la liaison extérieure $P_l P_l$, que des liaisons intérieures) et si s_l ne dépend pas de $Y_l - Z_l$, les cotes Y_l^* , Z_m^* de P_l et des autres points P_m de l'ensemble partiel (parmi lesquels les P_k) n'interviennent que par les différences $Y_l^* - Z_m^*$. Le système est alors surabondant et ne pourra être satisfait que s'il existe entre Π_B et T_B une relation particulière $\Pi_B = \mathcal{H}_l(T_B)$. Cette relation définit le *seuil du fluage généralisé prenant son origine* en P_l . Lorsque Π_B est $> \mathcal{H}_l(T_B)$, l'état établi est un état de fluage généralisé "secondaire" dans lequel les Z_i^* ($i \neq m$), $Y_l^* - Z_m^*$, Θ_i (i quelconque) et \dot{Y}_l^* restent constants, \dot{Y}_l^* étant > 0 .

13. ETUDE DES PETITS MOUVEMENTS AUTOUR DE L'ETAT ETABLI

Cherchons à mettre en équations les *petits mouvements de la structure autour de cet état établi de fluage secondaire*. Posons:

$$Z_i = Z_i^* + z_i, \quad \Theta_i = \Theta_i^* + \theta_i, \quad Y_l = Y_l^*(t) + y_l$$

et admettons que les z_i , θ_i , y_l , \dot{z}_i , \dot{y}_l restent assez petits pour qu'on puisse négliger dans les équations leurs carrés et leurs produits. Il vient:

Pour $i \neq l, k$ [cf. syst. (11)]:

$$\left. \begin{aligned} M_i \ddot{z}_i + \sum_j F_{ij}(\dot{z}_i - \dot{z}_j) + \sum_j K_{ij}(z_i - z_j) + \sum_j \xi_{ij} \theta_j &= 0 \\ c_i \dot{\theta}_i + \sum_j \delta_{ij}(\theta_i - \theta_j) + \Theta_i^* \sum_j \xi_{ji}(\dot{z}_i - \dot{z}_j) &= q_i \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Pour $i = l$, laissant provisoirement de côté la 1ère équation (21), nous remplacerons la seconde par la somme des deux équations membre à membre

$$\left. \begin{aligned} M_l \ddot{Z}_l + m_l(\dot{Y}_l - \dot{Z}_l) \\ = - \sum_h K_{lh}(Z_l - Z_h - l_{hl}) - \sum_k K_{lk}(Y_l - Z_k - l_{kl}) \\ - \sum_h F_{lh}(\dot{Z}_l - \dot{Z}_h) - \sum_k F_{lk}(\dot{Y}_l - \dot{Z}_k) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

puis nous linéariserons les équations (26) et (22), ce qui donne:

$$\left. \begin{aligned} M_l \ddot{z}_l + m_l (\dot{y}_l - \dot{z}_l) + \sum_h F_{lh} (\dot{z}_l - \dot{z}_h) + \sum_k F_{lk} (\dot{y}_l - \dot{z}_k) \\ + \sum_h K_{lh} (z_l - z_h) + \sum_k K_{lk} (y_l - z_k) + \sum_h \xi_{lh} \theta_h + \sum_k \xi_{lk} \theta_k = 0 \\ c_l \dot{\theta}_l + \sum_j \delta_{lj} (\theta_l - \theta_j) \\ + \Theta_l^* \left[\sum_h \xi_{hl} (\dot{z}_l - \dot{z}_h) + \sum_k \xi_{kl} (\dot{y}_l - \dot{z}_k) \right] - \Pi_l^* (\dot{y}_l - \dot{z}_l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Π_l^* étant le produit par s_l de la contrainte de fluage établi:

$$\Pi_l^* = s_l [\varpi_\lambda + D(\dot{Y}_l^*)^{1/2}]$$

En écrivant: $y_l - z_k = (y_l - z_l) + (z_l - z_k)$, $\dot{y}_l - \dot{z}_k = (\dot{y}_l - \dot{z}_l) + (\dot{z}_l - \dot{z}_k)$ et remarquant que:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{lk} &= \xi_{lk} + \frac{\partial K_{lk}}{\partial \Theta_k} (y_l - z_l) [\text{cf. (5')}] \\ \xi_{kl} &= \xi_{kl} - \frac{\partial K_{lk}}{\partial \Theta_k} (y_l - z_l) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

les équations (27) se mettent sous la forme:

$$\left. \begin{aligned} M_l \ddot{z}_l + \sum_j F_{lj} (\dot{z}_l - \dot{z}_j) + \sum_j K_{lj} (z_l - z_j) + \sum_j \xi_{lj} \theta_j + m_l (\dot{y}_l - \dot{z}_l) \\ + \left(\sum_k F_{lk} \right) (\dot{y}_l - \dot{z}_l) + \left(\sum_k K_{lk} \right) (y_l - z_l) = 0 \\ c_l \dot{\theta}_l + \sum_j \delta_{lj} (\theta_l - \theta_j) + \Theta_l^* \sum_j \xi_{jl} (\dot{z}_l - \dot{z}_j) \\ + \left(\Theta_l^* \sum_k \xi_{kl} - \Pi_l^* \right) (\dot{y}_l - \dot{z}_l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Les équations (23), (24) se traitent de la même façon et donnent:

$$\left. \begin{aligned} M_k \ddot{z}_k + \sum_j F_{kj} (\dot{z}_k - \dot{z}_j) + \sum_j K_{kj} (z_k - z_j) \\ + \sum_j \xi_{kj} \theta_j - F_{kl} (\dot{y}_l - \dot{z}_l) - K_{kl} (y_l - z_l) = 0 \\ c_k \dot{\theta}_k + \sum_j \delta_{kj} (\theta_k - \theta_j) + \Theta_k^* \sum_j \xi_{jk} (\dot{z}_k - \dot{z}_j) \\ - \Theta_k^* \xi_{lk} (\dot{y}_l - \dot{z}_l) = q_k \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Les valeurs de tous les coefficients sont celles de l'état établi.

14. RELATION APPROCHÉE DÉFINISSANT L'ÉTAT VIBRATOIRE EN UN POINT DE FLUAGE

Aux équations (25), (29) et (30), nous devons adjoindre, pour que le problème soit déterminé, l'équation linéarisée déduite de la 1^{ère} équation (21); si l'on remarque qu'il est normal d'admettre que les coefficients

s_l, ϖ_λ, D et α de la formule (20) ne dépendent que de θ_l , cette dernière s'écrit, en supposant, pour abrégé, α indépendant de θ_l :

$$\left. \begin{aligned} (M_l - m_l)\ddot{z}_l + \sum_h F_{lh}(\dot{z}_l - \dot{z}_h) + \sum_h K_{lh}(z_l - z_h) + \sum_h \xi_{lh}\theta_h \\ = \frac{s_l D}{\alpha} (\dot{Y}_l^*)^{1/\alpha-1}(\dot{y}_l - \dot{z}_l) + \left[\frac{\partial(s_l \varpi_\lambda)}{\partial \theta_l} + \frac{\partial(s_l D)}{\partial \theta_l} (\dot{Y}_l^*)^{1/\alpha} \right] \theta_l \\ = \frac{s_l D}{\alpha} (\dot{Y}_l^*)^{1/\alpha-1}(\dot{y}_l - \dot{z}_l - \Lambda_l \theta_l) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Λ_l désignant la dérivée $\partial \dot{Y}_l^* / \partial \theta_l$ par rapport à la température de la vitesse de fluage établi sous la charge Π_l^* constante. (De la relation: $\Pi_l^* = s_l[\varpi_\lambda + D(\dot{Y}_l^*)^{1/\alpha}]$, on déduit, en effet:

$$\frac{\partial(s_l \varpi_\lambda)}{\partial \theta_l} + \frac{\partial(s_l D)}{\partial \theta_l} (\dot{Y}_l^*)^{1/\alpha} = -\frac{s_l D}{\alpha} (\dot{Y}_l^*)^{1/\alpha-1} \Lambda_l$$

Multiplions le 1er et le 3e membres de (31) par $(\dot{Y}_l^*)^{1-1/\alpha}$:

$$\left. \begin{aligned} (\dot{Y}_l^*)^{1-1/\alpha} \left[(M_l - m_l)\ddot{z}_l + \sum_h F_{lh}(\dot{z}_l - \dot{z}_h) \right. \\ \left. + \sum_h K_{lh}(z_l - z_h) + \sum_h \xi_{lh}\theta_h \right] = \frac{s_l D}{\alpha} (\dot{y}_l - \dot{z}_l - \Lambda_l \theta_l) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Cette équation se simplifie au prix d'une nouvelle approximation: En tenant compte du fait que, dans les applications, le fluage secondaire est toujours très lent et le coefficient α nettement plus grand que 1 (il varie, pour les alliages réfractaires, de 3 à 10), on peut considérer $(\dot{Y}_l^*)^{1-1/\alpha}$ comme une quantité très petite au même titre que les $z_i, \theta_i, \dot{z}_i (i = h, l), \ddot{z}_i$; on est alors encouragé à négliger, dans l'équation (31), les termes contenant $(\dot{Y}_l^*)^{1-1/\alpha}$ en facteur, ce que conduit à remplacer (32) par l'équation tout à fait simple:

$$\dot{y}_l - \dot{z}_l - \Lambda_l \theta_l = 0 \quad (33)$$

dont l'interprétation est immédiate: toute variation transitoire de la température entraîne une variation de la vitesse de fluage égale à celle que la même variation de température, appliquée à titre permanent, entraînerait sur la vitesse de fluage établi.

Cela implique que $s_l D / \alpha$ ne soit pas lui-même très petit et que la condition (19) reste satisfaite, c'est-à-dire que l'on ait:

$$\theta_l > -\frac{1}{\Lambda_l} \dot{Y}_l^* \quad (34)$$

car Λ_l est toujours > 0 (Fig. 5).

Il est à noter que ce résultat ne fait intervenir que des propriétés qualitatives de la loi de fluage choisie [équation (20)].

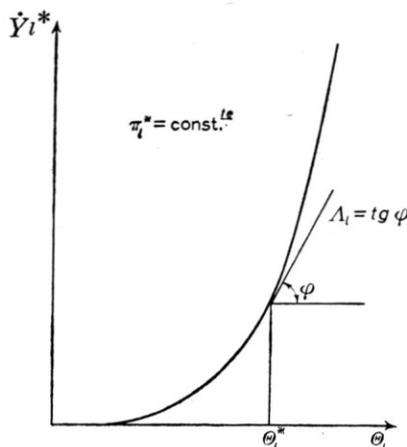


FIG. 5. Variation de la vitesse de fluage établi, sous charge constante, avec la température

15. EQUATIONS GENERALES DES PETITS MOUVEMENTS D'UNE STRUCTURE EN ETAT DE FLUAGE SECONDAIRE

Sous réserve de la légitimité des approximations faites, les équations (25), (29), (30), jointes à l'équation (32) éventuellement remplacée par (33), définissent complètement, au cours d'un fluage secondaire d'origine P_l et de vitesse \dot{Y}_l^* , les petits mouvements de la structure pour lesquels

$$|\theta_l| < \frac{1}{\Lambda_l} \dot{Y}_l^*$$

L'emploi de l'équation (33), lorsqu'il est justifié, simplifie considérablement l'étude ultérieure: il permet d'éliminer immédiatement y_l en remplaçant, dans les autres équations, $\dot{y}_l - \dot{z}_l$ par $\Lambda_l \theta_l$, $\dot{y}_l - \dot{z}_l$ par $\Lambda_l \theta_l$, $y_l - z_l$ par

$$\Lambda_l \left[\int_{t_0}^t \theta_l dt + (y_l - z_l)_{t=t_0} \right] = \Lambda_l u_l;$$

il vient alors:

Pour $i \neq l, k$:

$$M_i \ddot{z}_i + \sum_j F_{ij} (\dot{z}_i - \dot{z}_j) + \sum_j K_{ij} (z_i - z_j) + \sum_j \xi_{ij} \theta_j = 0$$

$$c_i \theta_i + \sum_j \delta_{ij} (\theta_i - \theta_j) + \Theta_i^* \sum_j \xi_{ji} (\dot{z}_i - \dot{z}_j) = q_i$$

($q_i = 0$ pour $i \neq n$, éventuellement: $q_n = -h\theta_n$).

Pour $i = l$:

$$\left. \begin{aligned}
 M_l \ddot{z}_l + \sum_j F_{lj}(\dot{z}_l - \dot{z}_j) + \sum_j K_{lj}(z_l - z_j) + \sum_j \xi_{lj} \theta_j \\
 + \Lambda_l [m_l \dot{\theta}_l + (\sum_k F_{lk}) \theta_l + (\sum_k K_{lk}) u_l] = 0 \\
 c_l \dot{\theta}_l + \sum_j \delta_{lj}(\theta_l - \theta_j) + \Theta_l^* \sum_j \xi_{jl}(\dot{z}_l - \dot{z}_j) \\
 + \Lambda_l (\Theta_l^* \sum_k \xi_{kl} - \Pi_l^*) \theta_l = 0 \\
 (\dot{u}_l = \theta_l)
 \end{aligned} \right\} (37)$$

Pour $i = k$:

$$\begin{aligned}
 M_k \ddot{z}_k + \sum_j F_{kj}(\dot{z}_k - \dot{z}_j) + \sum_j K_{kj}(z_k - z_j) + \sum_j \xi_{kj} \theta_j \\
 - \Lambda_l (F_{kl} \theta_l + K_{kl} u_l) = 0 \\
 c_k \dot{\theta}_k + \sum_j \delta_{kj}(\theta_k - \theta_j) + \Theta_k^* \sum_j \xi_{jk}(\dot{z}_k - \dot{z}_j) - \Lambda_l \Theta_k^* \xi_{lk} \theta_l = q_k
 \end{aligned}$$

($q_k = 0$ pour $k \neq n$, éventuellement: $q_n = -h\theta_n$)

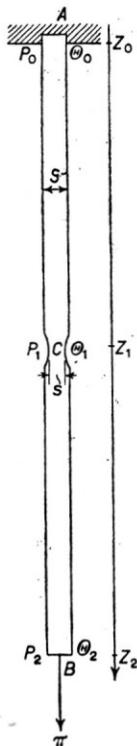


FIG. 6

Le système (37) redonne le système (11) lorsqu'on y fait $\Lambda_l = 0$. Tous les coefficients sont ceux de la structure sans fluage à l'exception de trois: Λ_l , m_l et Π_l^* .

16. EXEMPLE

A titre d'exemple, considérons un barreau homogène AB de section constante S sauf en son milieu C où il présente un étranglement de section s (Fig. 6). Il est fixé en A et soumis en B à une charge axiale Π suffisante pour provoquer dans la partie étranglée un fluage établi de vitesse W .

Pour étudier en toute première approximation les petites vibrations longitudinales du barreau, nous partagerons ce dernier en deux tronçons par les points de subdivision P_0 (embase A), P_1 (point de fluage C), P_2 (revêtement B) et répartirons la masse de chaque tronçon par moitié entre les deux extrémités. Il vient ainsi, en désignant par M la masse totale du barreau, L sa longueur, ϵ son coefficient de dilatation linéaire, c sa chaleur spécifique rapportée à l'unité de masse, δ sa conductance (ces deux dernières supposées indépendantes de la température):

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{M}{2}, & M_2 &= m_1 = \frac{M}{4}, & K_{01} &= K_{12} = \frac{2ES}{L}, \\ \xi_{01} &= \xi_{12} = -\xi_{21} = -\xi_{22} = \frac{1}{2}ES\epsilon, & \xi_{11} &= 0, \\ c_1 &= \frac{cM}{2}, & c_2 &= \frac{cM}{4}, & \delta_{01} &= \delta_{12} = 2\delta, & \Pi_1^* &= \Pi, \\ A_1 &= \frac{\partial W}{\partial \theta} \text{ sous la charge constante } \Pi \text{ pour } \theta = \theta_1^*. \end{aligned}$$

Les températures de régime θ_1^* et θ_2^* sont définies par:

$$\left. \begin{aligned} 2\delta(\theta_0 - 2\theta_1^* + \theta_2^*) + \Pi W(\theta_1^*) &= 0 \\ 2\delta(\theta_1^* - \theta_2^*) + h(T - \theta_2^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

si l'on prend pour $\mathcal{F}_B(\theta_B)$ la fonction $h(T - \theta_B)$ avec T donné et si l'on note que W est, sous la charge constante Π , une fonction connue de θ_1 .

Le système (37) s'écrit dans ce cas, en négligeant la viscosité du barreau:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{2} \ddot{z}_1 + \frac{2ES}{L} (2z_1 - z_2) + \frac{1}{2}ES\epsilon\theta_2 + A_1 \left(\frac{M}{4} \dot{\theta}_1 + \frac{2ES}{L} u_1 \right) &= 0 \\ c \frac{M}{2} \dot{\theta}_1 + 2\delta(2\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}ES\epsilon\theta_1^* \dot{z}_2 - A_1 \left(\frac{1}{2}ES\epsilon\theta_1^* + \Pi \right) \theta_1 &= 0 \\ \frac{M}{4} \ddot{z}_2 + \frac{2ES}{L} (z_2 - z_1) - \frac{1}{2}ES\epsilon(\theta_1 + \theta_2) - A_1 \frac{2ES}{L} u_1 &= 0 \\ \frac{cM}{4} \dot{\theta}_2 + 2\delta(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2}ES\epsilon\theta_2^* (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - A_1 \frac{1}{2}ES\epsilon\theta_2^* \theta_1 + h\theta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Le cas où la température du "revêtement" B est maintenue constante correspond au cas limite $h = \infty$: la dernière équation est alors remplacée par $\theta_2 = 0$.

17. FORME MATRICIELLE DES EQUATIONS

De même que le système (11), le système linéaire (37) peut se mettre sous forme matricielle:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{z} + F\dot{z} + Kz + Q\dot{\theta} + R\theta + Su = 0 \\ - \Theta^* \xi \dot{z} + c\dot{\theta} + T\theta = 0, \quad (\dot{u} = \theta) \end{aligned} \right\} (40)$$

les matrices Q, R, S, T étant définies par les relations

$$\begin{aligned} Q\dot{\theta} &= m(\Lambda\dot{\theta}) \\ R\theta &= \xi\theta + f(\Lambda\theta) \\ Su &= k(\Lambda u) \\ T\theta &= \delta\theta - (\Theta^*\zeta + \Pi^*)(\Lambda\theta) \end{aligned}$$

dans lesquelles m, Π^* représentent des matrices diagonales et $(\Lambda\dot{\theta}), (\Lambda\theta), (\Lambda u)$ des colonnes dont tous les éléments sont nuls sauf ceux d'indice l ; f, k, ζ des matrices qui se déduisent des matrices F, K, ξ en remplaçant par des zéros tous les termes F_{ij}, K_{ij}, ξ_{ij} dont les indices sont différents de lk ou de kl .

Le système (40) se réduit au système (12) lorsqu'on y fait $\Lambda = 0$; ne pas oublier qu'il doit être complété par l'inégalité: $|\theta_l| < (1/\Lambda_l) \dot{Y}_l^*$.

La forme (40) des équations est générale: elle s'étend à un fluage englobant un nombre quelconque de points du type C (f, k, ζ contiennent alors des termes non nuls d'indices l, l' si $P_l, P_{l'}$ sont deux points de fluage agissant l'un sur l'autre: cas, par exemple, des vibrations transversales d'un barreau en train de fluier par flexion).

18. CONCLUSION

Le système (40) se prête aux mêmes normalisations et simplifications que le système (12), ce qui permet d'étudier notamment la stabilité de ses solutions. Nous ne le ferons pas ici, notre but étant simplement de montrer comment l'étude classique des vibrations d'une structure par la méthode matricielle peut s'étendre au cas où celle-ci subit un fluage secondaire dans la direction des vibrations. Les considérations théoriques qui précèdent, et surtout la relation simplifiée (33), demandent à être soumises au contrôle de l'expérience. Il n'est pas interdit de penser qu'elles pourront jouer un rôle en aéronautique où l'on calcule maintenant la résistance de certains engins "à courte vie" en tolérant la possibilité d'un fluage limité en service.

BIBLIOGRAPHIE

- G. VIDAL, P. LESCOP, L. RAYMONDIN, Influence de la température sur les constantes élastiques des métaux et alliages, *Rev. Métall.*, Vol. 48, No. 11, 1951.
 G. VIDAL, A. LOUPOFF, Lois mathématiques et données expérimentales relatives au fluage des alliages réfractaires pour turbo-machines, *Docaéro*, No. 9, mai 1951.
 G. VIDAL, Conditions d'apparition de la rupture au cours des essais de fluage, *Métaux, Paris*, Vol. 27, No. 321, mai 1952.

- P. LE ROLLAND, Sur les propriétés mécaniques des solides en fonction de la température, *Métaux, Paris*, Vol. 27, No. 321, mai 1952.
- M. A. BIOT, Variational Principles in Irreversible Thermodynamics with Application to Viscoelasticity, *Phys. Rev.*, Vol. 97, No. 6, mars 1955.
- J. FRIEDEL, C. BOULANGER, C. CRUSSARD, Constantes élastiques et frottement intérieur de l'aluminium polygonisé, *Acta Met.*, Vol. 3, No. 4, juillet 1955.
- N. J. HOFF, Effets thermiques dans le calcul de la résistance des structures d'avions et d'engins, AGARD Report 52, janvier 1956.
- M. A. BIOT, Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics, *J. Appl. Phys.*, Vol. 27, No. 3, mars 1956.
- N. J. HOFF, Le fluage rapide dans les structures d'engins supersoniques (titre traduit), *J. Aero. Sci.*, oct. 1955; analysé dans *Docaéro*, No. 38, mai 1956.
- E. H. LEE, Stress Analysis in Viscoelastic Materials, *J. Appl. Phys.*, Vol. 27, No. 7, juillet 1956.
- G. VIDAL, Sur le fluage périodique des alliages résistants à chaud, *Rev. Métall.*, Vol. 53, No. 7, 1956.
- C. BOULANGER, C. CRUSSARD, Etude des propriétés mécaniques à très hautes températures, *Rev. Métall.*, Vol. 53, No. 9, 1956.
- MARTIN LESSEN, Thermoelasticity and Thermal Shock, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 5, No. 1, November 1956.
- B. J. LAZAN, Damping and Resonant Fatigue Behaviour of Materials, International Conference on Fatigue of Metals, London, September 1956.
- M. A. BIOT, New Methods in Heat Flow Analysis with Application to Flight Structures, Preprint No. 661, 25th Annual Meeting of the I.A.S., janvier 1957.
- W. PRAGER, Total Creep Under Varying Loads, *J. Aero. Sci.*, Vol. 24, No. 2, février 1957.
- SUD-AVIATION, Etude sur le calcul des structures soumises à l'échauffement cinétique, Note SP1-BC No. 115.064 non publiée.
- D. A. SHINN, Selected Properties of Structural Materials at Elevated Temperatures, AGARD, Report 104, avril 1957.
- N. J. HOFF, On Primary Creep, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 5, 1957.
- Y. N. RABOTNOF, S. A. CHESTERIKOF, Stabilité de tiges et de plaques dans les conditions du fluage (titre traduit), *Math. Mécanique Appl.*, U.R.S.S., Vol. 21, No. 3, mai-juin 1957.
- M. A. BIOT, Influence of Thermal Stresses on the Aeroelastic Stability of Supersonic Wings, *J. Aero. Sci.*, Vol. 24, No. 6, juin 1957.
- H. LAKS, C. D. WISEMAN, O. D. SHERBY, J. E. DORN, Effect of Stress on Creep at High Temperatures, *J. Appl. Mech.*, Vol. 24, No. 2, juin 1957.
- P. SANTINI, Termoelastodinamica delle ali a guscio, *L'Aerotecnica*, Vol. 37, No. 4, août 1957.
- AROUTIOUNIAN, *Applications de la théorie du fluage*, Eyrolles, Paris, 1957.
- M. BOULANGER, Processus de relaxation à haute température, *J. d'aut. I.R.S.I.D., Paris*, septembre 1957.
- R. MAZET, Sur l'application d'une méthode de transposition globale à l'étude des vibrations thermoélastiques des structures, *C.R., J. Acad. Sci.*, t. 245, p. 1043-5, septembre 1957.
- E. C. HERPERS, Essais de fluage en régime transitoire sur éprouvettes remplies de nid d'abeille en alliage léger, S.N.C.A.N., Note RTN No. 107/57, non publiée.
- W. PRAGER, *Problèmes de plasticité théorique*, Dunod, Paris, 1958.
- T. Y. THOMAS, Plastic Flow and Fracture in Solids, *J. Math. Mech.*, Vol. 7, No. 3, mai 1958.